ข้อสอบ midterm ปี 2557

1. จากรูป สปริง มวล M ยาว l ค่า stiffness เป็น s มีมวล m ผูกติดอยู่กับปลายสปริงและไถลไปกลับบนพื้นไม่มีความฝืดด้วยอัตราเร็ว v (พิจารณาให้เป็นค่าคงตัว)

กำหนดให้ (a) มวลของสปริงมีการกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวสปริง

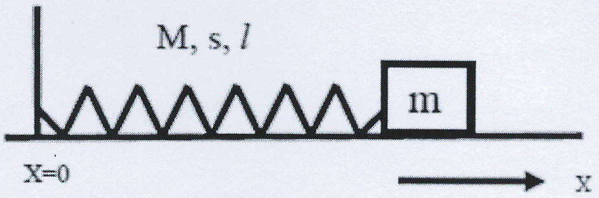
(b) ความเร็วของส่วนย่อยสปริงแปรตามความยาวของสปริงจากปลายที่ตรึงถึงตำแหน่งของส่วนย่อย

(c) ไม่มีแรงต้านใด ๆ มาเกี่ยวข้อง

(5) 1.1 จงหาพลังงานจลน์ในส่วนย่อยของสปริง (dK)

(5) 1.2 จงหาพลังงานจลน์ทั้งหมดของสปริง (K)

(5) 1.3 โดยอาศัย conservation of energy ให้หา effective mass M' (ค่ามวลตัวแทนของระบบซึ่งคิดผลของมวลสปริง M และมวลที่ผูกติดอยู่ m) และ ความถี่เชิงมุม (ω) ในการสั่น



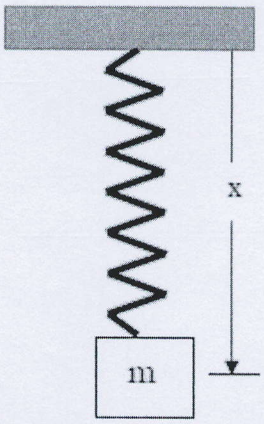
รูปข้อ 1

ข

3. อนุภาคมวล m ผูกติดที่ปลายข้างหนึ่งของสปริงที่มีค่า stiffness เป็น $4(mg/a)$ และ natural length เป็น a ถ้าอนุภาคนี้เคลื่อนที่ขึ้นลงในแนวดิ่งภายใต้แรงโน้มถ่วงและแรงดึงจากสปริง กำหนดให้ x เป็นความยาวของสปริงที่เวลา t ดังรูป

(4) 3.1 จงเขียน equation of motion

(6) 3.2 จงหา particular solution ของ forced oscillation เมื่อ $x(0)=\frac{5a}{2}$ และ $\dot{x}(0)=2(ag)^{\frac{1}{2}}$



รูปข้อ 3

6. Phase velocity v_p ของคลื่นผิวน้ำที่มีแรงตึงผิว T และความหนาแน่น ρ เขียนได้เป็น

$$v_p = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\lambda\rho}\right)}$$

เมื่อ g คือ ความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก และ λ คือความยาวคลื่น

(7) 6.1 จงหาความยาวคลื่นสั้นที่สุด (λ_{min}) ที่ทำให้เกิดค่า v_p น้อยที่สุด $(v_{p\ min})$ ในเทอมของตัวแปรที่ให้มา

(5) 6.2 จงเขียน dispersion relation $\omega(k)$

(4) 6.3 จงหา group velocity v_g

(4) 6.4 โดยอาศัย λ_{min} ใน 6.1 จงหา $v_{g\ min}$

ข้อสอบ midterm ปี 57

1. 1.1 จาก $dK = \frac{1}{2} dm\, v^2$

เนื่องจาก สปริงมีมวลกระจายอย่างสม่ำเสมอ ดังนั้นถ้าส่วนย่อยของสปริงที่สนใจยาว dx มวลส่วนนี้จะมีค่า

$$\frac{M}{l}\, dx$$

เนื่องจากความเร็วส่วนย่อยของสปริง แปรตามความยาวของสปริง วัดจากตำแหน่งที่ปลายตรึงกับตำแหน่งส่วนย่อยที่สนใจ $\therefore$ ความเร็วส่วนย่อยที่ความยาว x เขียนได้เป็น $\frac{v}{l} x$

$$\therefore\ dK = \frac{1}{2} dm\, v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{l} dx\right)\left(\frac{v x}{l}\right)^2$$

$$dK = \frac{M}{2l^3} v^2 x^2 dx \qquad \#$$

1.2 พลังงานจลน์ทั้งหมดของสปริง

$$K = \int dK = \int_0^l \frac{M}{2l^3} v^2 x^2 dx$$

$$\therefore K = \frac{1}{6} M v^2 \qquad \#$$

1.3 จาก conservation of energy

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{6} M v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E = \text{constant}$$

(พลังงานจลน์ของมวล m) (พลังงานจลน์ของสปริง) (พลังงานศักย์ยืดหยุ่น)

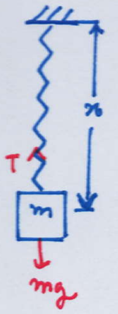
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}M + m\right) v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E$$

$$\therefore \text{effective mass } M' = m + \frac{M}{3}$$

และ $\omega = \sqrt{\dfrac{S}{m + M/3}}$ #

ข้อสอบ midterm ปี 57

3. 3.1 equation of motion



จาก $\Sigma F = m\ddot{x}$

กำหนดให้ทิศชี้ลงเป็นบวก ดังนั้น

$$mg - T = m\ddot{x} \quad \text{—(1)}$$

ในที่นี้ T คือ restoring force เขียนได้เป็น

$$T = (x-a) = \frac{4mg}{a}(x-a) \quad \text{—(2)}$$

(ระยะยืดจาก equilibrium)

แทน (2) ใน (1) ได้ $mg - 4\frac{mg}{a}(x-a) = m\ddot{x}$

$$\therefore \; m\ddot{x} + \frac{4mg}{a}x = 5mg$$

หรือ

$$\ddot{x} + 4\frac{g}{a}x = 5g \quad \text{—(3)}$$

3.2 Solve สมการที่ (3) เพื่อหา general solution ซึ่งมีค่าเป็น

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{5a}{4} \qquad \text{เมื่อ } \omega^2 = \frac{4g}{a}$$

จาก initial condition $x(0) = \frac{5a}{4}$ และ $\dot{x}(0) = 2(ag)^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore \; x(t=0) = \frac{5a}{2} = A + \frac{5a}{4}$$

$$A = \frac{5a}{4}$$

และ $x'(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t$

$$\because \; \dot{x}(0) = 2\sqrt{ag} = \omega B$$

$$\therefore \; B = a$$

∴ particular solution คือ

$$x(t) = \frac{5a}{4}\cos\omega t + a\sin\omega t + \frac{5a}{4} \qquad \#$$

ข้อสอบ midterm ปี 57

6 6.1 จาก $v_p = \left\{ \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\lambda \rho} \right\}^{\frac{1}{2}}$

จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น $\frac{g}{2\pi}\lambda^2 - v_p^2\lambda + \frac{2\pi T}{\rho} = 0$

สมการอยู่ในรูป quadratic ของ λ หาค่ารากได้เป็น

$$\lambda = \left[v_p^2 \pm \sqrt{v^4 - \frac{4gT}{\rho}} \right] \times \frac{\pi}{g} \quad -①$$

เนื่องจาก λ ต้องเป็นจำนวนจริง ดังนั้น เทอมที่อยู่ในวงเล็บ ต้อง ≥ 0

กล่าวคือ $v^4 - \frac{4gT}{\rho} \geq 0$

ดังนั้น ค่าที่น้อยที่สุด ของ v_p คือ $v_{p\,min} = \left(\frac{4gT}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}$ —②

เมื่อ ② ใน ① ทำให้ได้ λ_{min}

$$\therefore \lambda_{min} = \left[v_{p\,min}^2 \right] \frac{\pi}{g} = \left(\frac{4gT}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{g} = 2\pi \left(\frac{T}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \#$$

6.2 เนื่องจาก $v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\lambda \rho}}$

$$\because k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\therefore \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{kT}{\rho}}$$

หรือ $\omega(k) = \sqrt{gk + \frac{k^3 T}{\rho}}$; dispersion relation #

6.3 เนื่องจาก group velocity $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

$$\therefore v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g + 3\frac{k^2 T}{\rho}}{2\sqrt{(gk) + \frac{k^3 T}{\rho}}}$$

$$\because k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\therefore v_g = \frac{g + 12\pi^2 T/\rho\lambda^2}{2\sqrt{(2\pi g/\lambda) + 8\pi^3 T/\rho\lambda^3}}$$

6.4 λ_{min} จาก 6.1 คือ $2\pi\left(\frac{T}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}}$ แทนค่านี้ลงไปใน v_g ข้อ 6.3 จะได้

$$v_{g\,min} = \frac{2g}{\sqrt{2g\sqrt{\frac{\rho g}{T}}}} = \sqrt{2}\left(\frac{gT}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \#$$

ข้อสอบ midterm ปี 2558

1. 1.1 เชือกยาวเส้นหนึ่งมีมวลต่อความยาว 0.2 kg/m ถูกดึงด้วยแรงขนาดสม่ำเสมอ 500 N ตลอดทั้งเส้น จงหาอัตราเร็วของคลื่นตามขวางบนเชือกเส้นนี้และกำลังเฉลี่ยที่ต้องใช้เพื่อทำให้เชือกมี amplitude ในการสั่น 10 mm และความยาวคลื่น 0.5 m (2 คะแนน)

   1.2 ถ้าเชือกเส้นนี้เชื่อมต่อกับเชือกอีกเส้นหนึ่งที่มีค่ามวลต่อหนึ่งหน่วยความยาว 0.8 kg/m โดยกำหนดให้แรงตึงเชือกยังคงสม่ำเสมอตลอดเส้นเชือกทั้งสอง จงหา reflected intensity, transmitted intensity และถ้าต้องการ impedance matching ต้องเลือกเชือกที่แทรกระหว่างกลางให้มี impedance เป็นเท่าใดเพื่อให้ transmission ของ intensity เป็น 100% (3 คะแนน)

2. 2.1 จงแสดงให้เห็นว่า Group velocity v_g ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในตัวกลางที่มีสมบัติ dispersion และดรรชนีหักเห n เขียนได้เป็น

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

เมื่อ c คือ อัตราเร็วของแสงในสุญญากาศ และ ω คือ ความถี่เชิงมุมของคลื่น (3 คะแนน)

2.2 เมื่อนำข้อมูลนี้ไปศึกษาการเคลื่อนที่ของ pulse คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจาก pulsar (pulsar คือ ดาวนิวตรอนที่หมุนรอบตัวเองด้วยความเร็วสูงมาก และแผ่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในลักษณะที่เป็น pulse ออกมา) ที่เดินทางมาถึงโลกในแนว**เส้นตรง** โดยผ่านตัวกลางระหว่างดวงดาว (interstellar medium) ที่มีค่าดรรชนีหักเห

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}$$

เมื่อ e คือ ประจุของอิเล็กตรอน = 1.6×10^{-19} C

m คือ มวลของอิเล็กตรอน = 9.1×10^{-31} kg

N คือ electron density ใน interstellar medium = 3×10^4 m^{-3}

และ ε_0 = 8.85×10^{-12} F/m

จงหาระยะทางระหว่างโลกกับ pulsar เมื่อกำหนดให้สัญญาณคลื่นความถี่ 400 MHz และ 1400 MHz มาถึงโลกด้วยช่วงเวลาที่ต่างกัน 700 ms (7 คะแนน)

ข้อสอบ midterm ปี 58

1\. 1.1 $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{500}{0.2}} = 50\ m/s$

กำลังเฉลี่ย (อัตราการส่งผ่านพลังงาน) = energy × velocity

$$= \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 c$$

แทนค่าต่างๆลงไป จะได้

กำลังเฉลี่ย = 197 W #

1.2 โดยอาศัยความสัมพันธ์ reflected intensity $= \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$

และ transmitted intensity $= \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$

$$Z_1 = \rho_1 c_1 = (0.2)(50) = 10\ \frac{kg}{s}$$

$$Z_2 = \rho_2 c_2 = (0.8)(25) = 20\ \frac{kg}{s}$$

∴ reflected intensity $= \left(\frac{10-20}{10+20}\right)^2 = 0.11$

transmitted intensity $= \frac{(4)(10)(20)}{(10+20)^2} = 0.88$

ในกรณีที่ต้องการ impedance matching ค่า impedance ของเชือกตรงกลาง ควรมีค่าเป็น

$Z' = \sqrt{Z_1 Z_2} = 14.1\ \frac{kg}{s}$ และมีความยาวเป็น $\frac{\lambda'}{4}$ เมื่อ λ' คือ ความยาวคลื่นของเชือกที่นำมาแทรก

#

ข้อสอบ midterm ปี 58

2.1 จาก $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$

เริ่มพิจารณาจาก phase velocity $v = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{n}$

$$\therefore \frac{k}{\omega} = \frac{n}{c} \rightarrow k = \frac{\omega n}{c}$$

$$\therefore \frac{dk}{d\omega} = \frac{\omega}{c}\frac{dn}{d\omega} + \frac{n}{c}$$

$$\therefore v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n + \omega\dfrac{dn}{d\omega}} \quad \#$$

2.2 เนื่องจาก $n^2 = 1 - \dfrac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega^2}$ สามารถประมาณได้โดยใช้ Binomial expansion

$$(1 \pm x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2}x \quad \text{เมื่อ } x << 1$$

ซึ่งสอดคล้องกับ $\dfrac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega^2} << 1$

$$\therefore n = 1 - \frac{1}{2}\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega^2}$$

$$\frac{\omega dn}{d\omega} = \frac{\omega Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega^3} = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega^2}$$

เนื่องจาก $v_{g1} = \dfrac{c}{\mathcal{N}_1}$ เมื่อ $\mathcal{N}_i = n_i + \omega\dfrac{dn_i}{d\omega}$ = group refractive index

$$\therefore v_{g1} = \frac{c}{\mathcal{N}_1} = \frac{s_1}{t_1} \quad \text{และ} \quad v_{g2} = \frac{c}{\mathcal{N}_2} = \frac{s_2}{t_2}$$

$$\therefore t_2 - t_1 = \frac{s_2\mathcal{N}_2}{c} - \frac{s_1\mathcal{N}_1}{c}$$

ระยะทางที่สัญญาณความถี่ 400 MHz และ 1400 Hz เดินทาง ซึ่งก็คือระยะทางระหว่างโลกกับ pulsar นั่นเอง ⇐ $\because s_1 = s_2 = s$ $\quad \therefore \Delta t = \dfrac{s}{c}(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)$

แทนค่า $\mathcal{N}_1 = \left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega_1^2}\right) + \dfrac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_1\omega^2} = 1 + \dfrac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m\omega_1^2}$

ในทำนองเดียวกัน $\mathcal{N}_2 = 1 + \dfrac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m\omega_2^2}$

$$\therefore \Delta t = \frac{s}{c}\left(1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m\omega_2^2} - 1 - \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m\omega_1^2}\right)$$

แทนค่าต่างๆ ลงไป จะได้

$$s = 3.04 \times 10^{19} \text{ m} \quad \#$$

ข้อสอบ midterm ปี 2559

1. กำหนดความหนาแน่นของของเหลวชนิดหนึ่งเพิ่มตามความลึกอย่างเชิงเส้น ถ้าความหนาแน่นที่ผิวเป็น ρ_0 และที่ระดับความลึกเป็น D มีความหนาแน่นเป็น $2\rho_0$

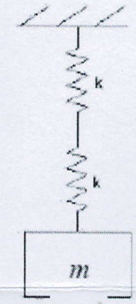
   จงตอบคำถามต่อไปนี้

   1.1 (3 คะแนน) จงเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ความหนาแน่นของของเหลวกับความลึกตามเงื่อนไขที่โจทย์ให้มา

   1.2 (3 คะแนน) เมื่อปล่อยลูกทรงกลมความหนาแน่น $2\rho_0$ ที่ระดับความลึก $D/2$ หากไม่พิจารณาแรงเสียดทาน จงเขียนสมการการเคลื่อนที่ของลูกทรงกลม

   1.3 (4 คะแนน) จงหา general solution ของลูกทรงกลม คาบ แอมพลิจูด และอธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ของลูกทรงกลมว่าเป็นแบบใด

2. กำหนดแอมพลิจูดของการสั่นในแนวดิ่งสำหรับระบบสปริงดังรูปมีค่าลดลงเหลือ 20% ของค่าเริ่มต้นเมื่อการสั่นผ่านไป 5 รอบ ถ้าให้ k = 80 Nm^{-1} และมวล m = 2.5 kg จงตอบคำถามต่อไปนี้



   2.1 (2 คะแนน) โดยทั่วไป solution สำหรับ damped simple harmonic motion เขียนได้เป็น

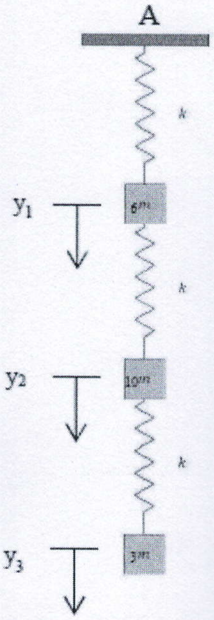
$$x = e^{-rt/2m}\left(C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}\right)$$

   จงแสดงให้เห็นว่า solution ดังกล่าว เขียนได้เป็น $x = Ae^{-rt/2m}\sin(\omega' t + \phi)$ เมื่อ A และ ϕ เป็นค่าคงตัว

   2.2 (4 คะแนน) จงหา logarithmic decrement สำหรับ damped simple harmonic motion นี้

   2.3 (4 คะแนน) จงหาค่า damping coefficient r สำหรับ damped simple harmonic motion นี้

4. สปริงเบาสามเส้นเหมือนกันทุกประการมีมวลขนาด $6m$ $10m$ และ $3m$ ผูกติดอยู่ตามลำดับตามรูป เมื่อทำให้เกิดการสั่น มวลทั้งสามเคลื่อนที่ขึ้นลงในแนวดิ่งที่ผ่านจุด A (โดยปลายจุด A ตรึงแน่น) กำหนดให้ k คือค่าคงตัวของสปริงทั้งสาม จงตอบคำถามต่อไปนี้



4.1 (3 คะแนน) จงเขียนสมการการเคลื่อนที่ของมวลทั้งสาม

4.2 (2 คะแนน) จงเขียนความถี่ของ free oscillation ω_0

4.3 (9 คะแนน) จงหาความถี่ของ normal mode vibration ทั้งหมดที่เกิดขึ้นโดยให้ตอบในเทอมของ ω_0

7. กำหนด phase velocity ของ gravity wave ในของเหลวที่ความลึก h เขียนได้เป็น

$$v^2 = \frac{g}{k}\tanh kh$$

เมื่อ g คือ gravitational acceleration

k คือ wave number เขียนได้เป็น $2\pi/\lambda$

และ λ คือ ความยาวคลื่น

จงตอบคำถามต่อไปนี้

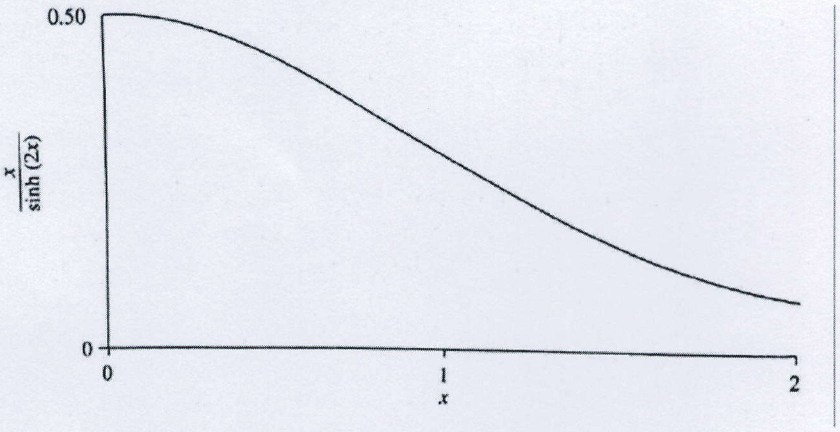
7.1 (2 คะแนน) จงเขียนสมการ dispersion relation $\omega(k)$ ของ gravity wave

7.2 (3 คะแนน) จงวาดกราฟคร่าว ๆ ของ dispersion relation ของ gravity wave ที่ได้ในข้อ 7.1

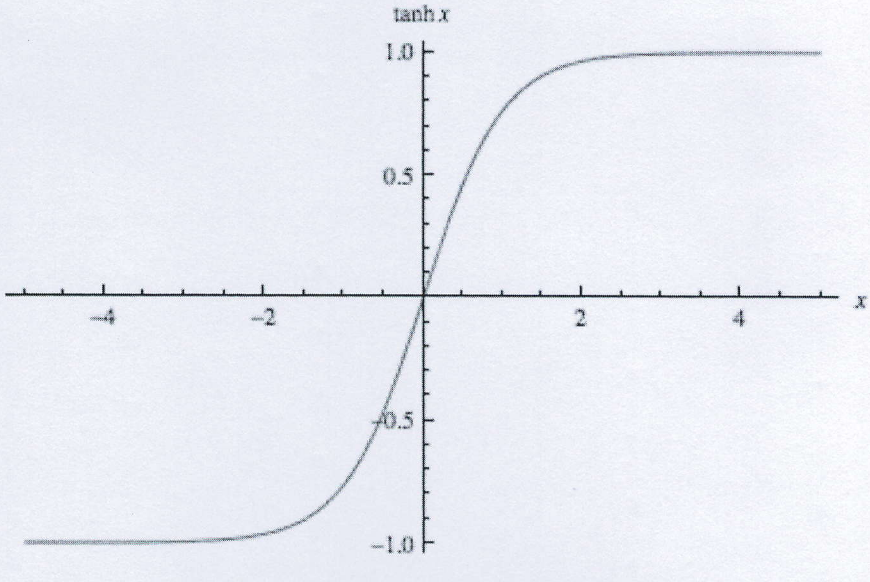
7.3 (3 คะแนน) จงหา v_g/v เมื่อ v_g คือ group velocity ของ gravity wave

กำหนดให้ $$\frac{d}{dx}\tanh x = \mathrm{sech}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

7.4 (2 คะแนน) โดยอาศัยกราฟ $x/\sinh(2x)$ ที่ให้มา จงหาค่าขอบเขตของ group velocity v_g ที่ได้ในข้อ 7.3 ในเทอมของ phase velocity v



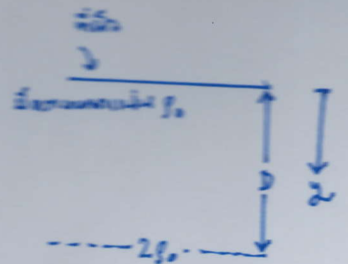
7.5 (10 คะแนน) โดยอาศัยกราฟ $\tanh x$ ที่ให้มา จงหาขนาดของ phase velocity v และ group velocity v_g สำหรับ gravity wave ที่มีความถี่ 1 Hz ณ ความลึก 0.1 m (กำหนด g = 9.8 ms^{-2})



http://mathworld.wolfram.com/HyperbolicTangent.html

ข้อสอบ [illegible] ปี 59

1. โจทย์กำหนด ของเหลวมีการเปลี่ยนแปลง ความหนาแน่น ตามความลึก แบบเชิงเส้น



1.1 จากความสัมพันธ์ $\rho \propto d$

$$\rho = \alpha y + \beta$$

ที่ผิวของเหลว $d = 0$; $\therefore \rho_0 = \beta$

ที่ความลึก $y = D$; $2\rho_0 = \alpha D + \rho_0$

$$\therefore \alpha = \rho_0 / D$$

∴ สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่น และ ระดับความลึก เขียนได้เป็น

$$\rho = \frac{\rho_0}{D} y + \rho_0 \quad -①$$

1.2

แรงที่กระทำต่อลูกทรงกลมประกอบด้วย น้ำหนัก mg และ แรงลอยตัว $\rho' V g$ ที่ความลึก y ใดๆ

$$\therefore \Sigma F = m\ddot{y}$$

(มวลของทรงกลม)

$$mg - \rho' V g = (2\rho_0 V)\ddot{y}$$

$$2\rho_0 V g - \left(\frac{\rho_0}{D} y + \rho_0\right) V g = 2\rho_0 V \ddot{y}$$

$$\therefore \ddot{y} + \frac{g}{2D} y = \frac{g}{2} \quad -② \quad \#$$

1.3 general solution ของ ② เขียนได้เป็น (การเคลื่อนที่เป็นแบบ force harmonic ไม่มีแรงต้าน

$$y = A \sin(\omega t + \phi) + D \quad ; \quad \omega^2 = \frac{g}{2D}$$

เราสามารถหา ϕ และ A ได้จาก initial condition

$$@\, t = 0 \quad y = \frac{D}{2} = A\sin\phi \quad -③$$

$$\dot{y} = 0 = \omega A \cos\phi \quad -④$$

$$\because \omega, A \neq 0 \quad \therefore \cos\phi = 0 \text{ เมื่อ } \phi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$@\, t = 0;\ y = \frac{D}{2} = A\sin\frac{\pi}{2}$ (จาก $\phi = \frac{\pi}{2}$)

$$\therefore A = \frac{D}{2} \qquad \therefore y = \left(\frac{D}{2}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + D$$

$@\, t = 0;\ y = \frac{D}{2} = A\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (จาก $\phi = -\frac{\pi}{2}$)

$$\therefore A = -\frac{D}{2} \qquad \therefore y = \left(-\frac{D}{2}\right)\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + D$$

$$= -\frac{D}{2}\cos\omega t + D$$

Solution ไหนเป็นคำตอบที่ถูกต้อง ?

\#

12/20

2 2.1 กำหนด $x = e^{-rt/2m} \left(c_1 e^{i\omega' t} + c_2 e^{-i\omega' t} \right)$ —①

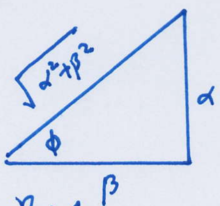
เทอมในวงเล็บเขียนได้เป็น

$$\left(c_1 e^{i\omega' t} + c_2 e^{-i\omega' t} \right) = (c_1 + c_2)\cos\omega' t + i(c_1 - c_2)\sin\omega' t \quad \text{—②}$$

กำหนดให้ $c_1 + c_2 = \alpha$

$i(c_1 - c_2) = \beta$

และ



$$\sin\phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \quad , \quad \cos\phi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

∴ ② เขียนใหม่ได้เป็น

$$(c_1+c_2)\cos\omega' t + i(c_1-c_2)\sin\omega' t = \underbrace{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}_{A} \left(\sin\phi\cos\omega' t + \cos\phi\sin\omega' t \right)$$

$$= A\sin(\omega' t + \phi)$$

∴ ② เขียนได้เป็น $x = A e^{-rt/2m} \sin(\omega' t + \phi)$ เมื่อ A, ϕ เป็นค่าคงตัว #

2.2 logarithmic decrement บอกถึงอัตราการลดลงของ amplitude ที่อยู่ติดกัน ซึ่งเขียนได้เป็น

amplitude ลดลงเหลือ 20% ของค่าเริ่มต้น

$$n\delta = \ln \frac{A_0}{A_n}$$

$$\therefore \frac{A_0}{A_n} = e^{n\delta}$$

โจทย์กำหนดให้การสั่นผ่านไป 5 รอบ ถ้า amplitude เริ่มต้นเป็น A_0 เมื่อผ่านไป 5 รอบ $n = 5$

$$\therefore \frac{A_0}{A_5} = e^{5\delta}$$

$$\therefore \ln 5 = 5\delta$$

$$\delta = \frac{\ln 5}{5} = 0.32 \quad \#$$

2.3 จาก $\delta = \frac{r}{2m}\tau'$; $\tau' = \frac{2\pi}{\omega'}$

โดยที่ $\omega'^2 = \omega^2 - \frac{r^2}{4m^2}$; $\omega^2 = \frac{s}{2m}$

$$\therefore \delta = \frac{r}{2m}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \frac{r^2}{4m^2}}} \right)$$

$$\therefore r = \frac{2m\omega}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{\delta^2} + 1}} \quad \text{(damping coefficient)} \quad \#$$

กลายเป็นสมการนี้ได้!

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

ข้อสอบ midterm 59

4.1

สมการการเคลื่อนที่ของมวลทั้งสาม

$$6m\ddot{y}_1 = -ky_1 + k(y_2-y_1) = -2ky_1 + ky_2 \quad -①$$

$$10m\ddot{y}_2 = -k(y_2-y_1) + k(y_3-y_2) = -2ky_2 + ky_1 + ky_3 \quad -②$$

$$3m\ddot{y}_3 = -ky_3 + ky_2 \quad -③$$

สมมติให้ wave function ซึ่งเป็น solution ของ ① ② และ ③ เขียนได้เป็น

$$y_1 = A_1 e^{i\omega t} \rightarrow \ddot{y}_1 = -\omega^2 y_1 \quad -④$$

$$y_2 = A_2 e^{i\omega t} \rightarrow \ddot{y}_2 = -\omega^2 y_2 \quad -⑤$$

$$y_3 = A_3 e^{i\omega t} \rightarrow \ddot{y}_3 = -\omega^2 y_3 \quad -⑥$$

แทน ④ ใน ① , ⑤ ใน ② และ ⑥ ใน ③

$$\left.\begin{aligned} 6m\omega^2 y_1 - 2ky_1 + ky_2 &= 0 \\ ky_1 + (10m\omega^2 - 2k)y_2 + ky_3 &= 0 \\ 0 + ky_2 + (3m\omega^2 - k)y_3 &= 0 \end{aligned}\right\} ⑥$$

จัด ⑥ ให้อยู่ในรูปของ matrix

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (6m\omega^2 - 2k & k & 0 \\ k & (10m\omega^2 - 2k) & k \\ 0 & k & (3m\omega^2 - k) \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

สำหรับ nontrivial solution determinant ของ [matrix] $= 0$

จะได้ normal mode frequencies ออกมา 3 ค่า ประกอบด้วย

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{3}, \ \frac{\omega_0^2}{30} \text{ และ } \frac{\omega_0^2}{2}$$ ← คำตอบ 4.3

โดยที่ $\left\{ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \right.$ ← คำตอบ 4

free oscillation

#

7. 7.1 กำหนด phase velocity ของ gravity wave

$$v^2 = \frac{g}{k}\tanh kh$$

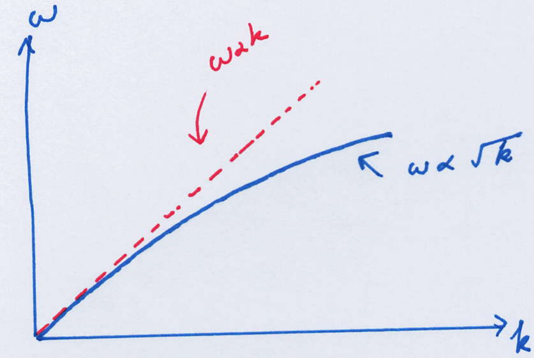
dispersion relation $\omega(k)$ ของ gravity wave

$$\because\ v = \frac{\omega}{k}$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = v^2 = \frac{g}{k}\tanh kh$$

$$\therefore\ \omega = (gk\tanh kh)^{\frac{1}{2}}$$

7.2



รูปกราฟข้างต้นได้จากการพิจารณา ตอนที่ $k \to 0$ และ $k \to \infty$

เมื่อ $k \to 0$ $\tanh kh \to kh$

$\therefore\ \omega \approx (ghk^2)^{\frac{1}{2}}$ หรือ $\omega \propto k$

เมื่อ $k \to \infty$ ทำให้ $\tanh kh \to 1$

$\therefore\ \omega = (gk)^{\frac{1}{2}}$ หรือ $\omega \propto \sqrt{k}$ #

7.3 จาก $v^2 = \frac{g}{k}\tanh kh$ และ $\omega^2 = gk\tanh kh$

$$\because\ v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$$\therefore\ \frac{v_g}{v} = \frac{1}{2} + \frac{hk}{\sinh(2hk)}$$ #

7.4 จากกราฟ เมื่อ hk มีค่าน้อยๆ $\frac{hk}{\sinh(2hk)} \to 0.5$ หรือ $\frac{v_g}{v} = 1$

เมื่อ hk มีค่าใหญ่ๆ $\frac{hk}{\sinh(2hk)} \to 0$

หรือ $\frac{v_g}{v} = \frac{1}{2}$

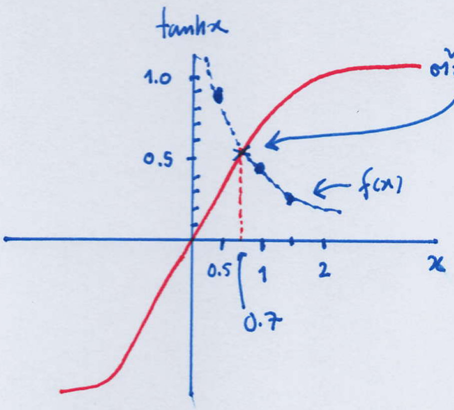
$$\therefore\ \frac{1}{2} < \frac{v_g}{v} < 1$$

หรือ $\frac{v}{2} < v_g < v$ #

7.5 กำหนด ความถี่ $f = 1\ Hz$ + ความลึก $0.1\ m$, $g = 9.8\ m/s^2$

จาก $v^2 = \frac{g}{k} \tanh kh$

$$\frac{h\omega^2}{gx} = \tanh x \qquad \text{เมื่อ } x = kh$$



ต้องหาจุดตัด ระหว่าง กราฟ $\frac{h}{g}\frac{\omega^2}{x}$ กับ $\tanh x$

เมื่อได้ค่า x จะหาค่า k ได้ ซึ่งจะทำให้คำนวณ ค่า v & v_g ได้

เมื่อ $x = 0$; $f(x) \rightarrow \infty$; $\tanh x = 0$

$x = 2$; $f(x) \rightarrow 0.201$; $\tanh x = 1$

$x = 1.5$; $f(x) = 0.268$

$x = 1.0$; $f(x) = 0.402$

$x = 0.5$; $f(x) = 0.804$

จากรูป จุดตัด อยู่ที่ $x \approx 0.7$

$$\therefore x = 0.7$$

$$kh = 0.7$$

$$\therefore k = \frac{0.7}{h} = \frac{0.7}{0.1} = 7\ m^{-1}$$

$$\because v^2 = \frac{g}{k} \tanh kh$$

$$\therefore v = \left(\frac{9.8}{7} \tanh (7)(0.1)\right)^{\frac{1}{2}} = 0.91\ m/s$$

$$v_g = \left(\frac{1}{2} + \frac{hk}{\sinh(2hk)}\right) v$$

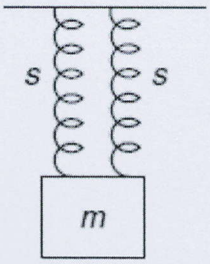
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{(0.1)(7)}{\sinh(2 \times 0.1 \times 7)}\right) 0.91$$

$$= 0.79\ m/s$$ #

ข้อสอบ midterm ปี 2560

2. ระบบสปริงดังรูปข้างล่างมีแรงต้านการสั่นกระทำตามสมการ $F = -pv$ เมื่อ p คือค่าคงตัวและ v คือความเร็ว กำหนดให้ตอนเริ่มต้น ระบบอยู่ ณ ตำแหน่งสมดุลและมีความเร็วเป็น 0.068 m/s

ถ้า stiffness s = 10 N/m มวล m = 10 kg และ p = 8 Ns/m



2.1 **(2 คะแนน)** จงเขียน equation of motion สำหรับ oscillating system นี้

2.2 **(8 คะแนน)** จงหาการกระจัดและความเร็วของมวล m ที่เวลา t ใด ๆ

6. ค่า relative permittivity ของ ionized gas เขียนได้เป็น

$$\varepsilon_r = \frac{c^2}{v^2} = 1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega}\right)^2$$

เมื่อ v คือ phase velocity c คือ อัตราเร็วของแสง และ ω_e คือ electron plasma frequency ซึ่งถือว่าเป็นค่าคงตัว

จงตอบคำถามต่อไปนี้

6.1 **(5 คะแนน)** จงเขียน dispersion relation และอธิบายความหมายของความสัมพันธ์ดังกล่าว

6.2 **(3 คะแนน)** จงหา group velocity ของ electromagnetic waves ใน ionized gas ในเทอมของ c, ω และ k

6.3 **(4 คะแนน)** ในกรณีที่ $\omega \gg \omega_e$ เกิดอะไรขึ้นกับปรากฏการณ์ dispersion ของ ionized gas ให้ตอบคำถามพร้อมอธิบายเหตุผลประกอบ

6.4 **(5 คะแนน)** จงแสดงให้เห็นว่าในกรณีที่ $\omega < \omega_e$ จะพบว่า travelling ที่เคลื่อนที่เข้าไปใน ionized gas มี amplitude ลดลง

กำหนดให้ wave function ของ travelling wave ในแนวแกน z เขียนได้เป็น $e^{i(kz-\omega t)}$

6.5 **(5 คะแนน)** ถ้ากำหนดให้ $\omega_e^2 = \dfrac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}$ จงแสดงให้เห็นว่าความยาวคลื่นสูงสุดที่สามารถส่งเข้าไปใน ionized gas โดยไม่เกิดการลดทอน ต้องเป็น electromagnetic waves ในย่านที่ต่ำกว่า microwave

กำหนดค่าคงตัวต่าง ๆ ดังนี้ $n_e \sim 10^{20}$, $\varepsilon_0 = 8.8\times10^{-12}$ F/m, $m_e = 9.1\times10^{-31}$ kg, $e = 1.6\times10^{-19}$ C

ข้อสอบ midterm 60

2\. 2.1 equation of motion สำหรับมวล m เขียนได้เป็น

$$\Sigma F = m\ddot{y}$$

$$\therefore m\ddot{y} = -pv - s'y$$

โดยที่ $s' = 2s$

$$\therefore m\ddot{y} + pv + 2sy = 0$$

solve หา y ได้เป็น

$$y(t) = e^{-0.4t}(A\cos 1.36t + B\sin 1.36t) \quad \#$$

2.2 โดยอาศัย initial conditions $t = 0$, $y = 0$ และ $\dot{y} = 0.068$ m/s

พบว่า $A = 0$

และ $B = 0.05$ m

$$\therefore y(t) = e^{-0.4t}(0.05)\sin 1.36t \quad \#$$

6. กำหนด relative permittivity ของ ionized gas เป็น

$$\varepsilon_r = \frac{c^2}{v^2} = 1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega}\right)^2$$

6.1 เขียน dispersion relation

จาก $\frac{c^2}{v^2} = 1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega}\right)^2$

$\because \; v = \frac{\omega}{k}$

$\therefore \; \frac{k^2c^2}{\omega^2} = 1 - \left(\frac{\omega_e^2}{\omega^2}\right)$

$\therefore \; \omega^2 = k^2c^2 + \omega_e^2$ #

6.2 $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

$v_g = \frac{d}{dk}(\omega^2) = \frac{d}{dk}(k^2c^2 + \omega_e^2) = \frac{kc^2}{\omega}$ #

6.3 กรณี $\omega >> \omega_e$

จะได้ว่า $\omega^2 \approx k^2c^2$

หรือ $\omega = kc$ ซึ่งเป็น relation ของ non dispersive medium หรือกล่าวได้ว่า ถ้าความถี่ของ EM wave สูงกว่า plasma frequency ω_e มาก ionized gas จะประพฤติตัวเป็น non dispersive medium

6.4 กรณี $\omega < \omega_e$

จาก $\omega^2 = k^2c^2 + \omega_e^2$

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_e^2}{c^2}}$$

เมื่อ $\omega < \omega_e$ แสดงว่า k ต้องอยู่ในรูป imaginary

ดังนั้น $k = i\sqrt{\frac{\omega_e^2 - \omega^2}{c^2}} = i\alpha$ —①

ถ้ากำหนด travelling wave อยู่ในรูป $y = Ae^{i(kx - \omega t)}$

$= Ae^{+ikx}e^{-i\omega t}$ —②

แทน ① ใน ② จะได้

$$y = Ae^{+i(i\alpha x)}e^{-i\omega t}$$

$$= Ae^{-\alpha x}e^{-i\omega t}$$ #

แสดงถึงการลดลงของ amplitude คลื่นที่เดินทางใน ionized gas

20/29

6.5 กำหนด $\omega_e^2 = \dfrac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}$

จาก 6.4 $k^2c^2 = \omega^2 - \omega_e^2$

การลดทอนของ amplitude คลื่นเกิดขึ้นเมื่อ $\omega < \omega_e$ ดังนั้น คลื่นจะไม่เกิดการลดทอน ต้องเป็นไปตามเงื่อนไข $\omega = \omega_e$

$$\therefore \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}$$

$$\therefore \lambda = \left(\frac{(2\pi c)^2 m_e \varepsilon_0}{n_e e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{(2\pi \times 3\times10^8)^2 (9.1\times10^{-31})(8.8\times10^{-12})}{(10^{20})(1.6\times10^{-19})^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \lambda = 3.33\times10^{-3}\ m$$ #

(ความยาวคลื่นสูงสุด อยู่ในช่วง mm wave หรือ microwave)

ข้อสอบแก้ไขใหม่สำหรับสอบวิชา SCPY 351 รหัสนักศึกษา...

ส่งวันที่ **25** ตุลาคม พ.ศ. **2560** ก่อนเวลา **16.00** น.

---

4. วัตถุ m มวล 2 kg ผูกติดกับสปริงที่มีมวลน้อยมาก ทำให้สปริงยืดออก 2.5 cm ถ้าการสั่นใน steady state ของสปริงเป็นแบบ simple harmonic ด้วยแอมพลิจูด 2 mm และกำหนด Q factor ของระบบเป็น 20 **โดยที่ Q factor หรือ Q value เขียนได้ในเทอมของ angular frequency ω_0 มวลวัตถุ m และ damping coefficient r ได้ดังนี้** $Q = \frac{\omega_0 m}{r}$ **(จากหนังสือ The Physics of Vibrations and Waves, 6th ed. ของ H J Pain หน้า 71)**

จงหาค่าต่อไปนี้

4.1 **(2 คะแนน)** angular frequency ω_0 ของ free undamped oscillation

$\omega_0 = \sqrt{\frac{s}{m}}$ โดยที่ s หาได้จาก $F/x = \frac{mg}{x} = \frac{2(9.8)}{(2.5\times10^{-2})} = 784$ N/m

$\therefore \omega_0 = \sqrt{\frac{784}{2}} \approx 19.8\ s^{-1}$

4.2 **(7 คะแนน)** แอมพลิจูดของ forced oscillation (ใน steady state) เมื่อ $\omega = \omega_0$

(แนะ : พยายามจัดรูป amplitude ของ forced oscillation ให้อยู่ในเทอมของ F_0 , m , r , ω **และ** ω_0 **แล้วค่อยพิจารณาตามเงื่อนไขที่ให้มา)**

จาก Amplitude ของ Forced oscillation คือ

$$A = \frac{F_0}{\omega Z_m} = \frac{F_0}{\omega\left[r^2 + (\omega m - \frac{s}{\omega})^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{F_0}{\omega\left[r^2 + m^2\omega^2(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

กรณีที่ $\omega = \omega_0$, $A = \frac{F_0}{\omega r}$,

$\because Q = \frac{\omega_0 m}{r}$

$$\therefore A = \frac{F_0 Q}{\omega_0^2 m} = \frac{(sx)(Q)}{\omega_0^2 m} = \frac{(784)(2\times10^{-3})(20)}{(19.8)^2(2)} = 3.8\text{cm}$$

ข้อสอบ midterm ปี 60

ข้อสอบแก้ไขใหม่สำหรับสอบวิชา SCPY 351 รหัสนักศึกษา...

ส่งวันที่ **25** ตุลาคม พ.ศ. **2560** ก่อนเวลา **16.00** น.

สำหรับตอบข้อ 4.2

4.3 **(4 คะแนน)** ขนาดของ average input power เพื่อที่จะรักษาให้ระบบ forced oscillation นี้ สั่นด้วย angular frequency ω ที่มีขนาด 1.01 เท่าของ ω_0

average power input $= \frac{1}{2}\frac{rF_0^2}{Z_m^2}$

เนื่องจาก $\frac{r}{Z_m^2} = \frac{r}{r^2 + (\omega m - \frac{s}{\omega})^2}$

$= \frac{\omega^2 r/m^2}{\left(\frac{\omega^2 r^2}{m^2} + (\omega^2-\omega_0^2)^2\right)}$

∴ average power input $= \frac{1}{2}\frac{F_0^2}{m}\frac{\omega^2 r/m}{\left(\frac{\omega^2 r^2}{m^2} + (\omega^2-\omega_0^2)^2\right)}$

∵ $Q = \frac{\omega_0 m}{r}$

เขียน average power input ในรูปของ Q

$\frac{1}{2}\frac{F_0^2}{m}\frac{\omega^2\omega_0/Q}{\left(\frac{\omega^2\omega_0^2}{Q^2} + (\omega^2-\omega_0^2)^2\right)}$

แทนค่า $Q = 20$, $\omega = 1.01\omega_0$

$\omega_0 = 19.8$ rad, $m = 2$ kg

$F_0 = 1.49$ N

∴ average power input = 0.48 W #

4.4 **(2 คะแนน)** average power loss ใน steady state เนื่องจาก friction ที่ angular frequency $\omega = 1.01\omega_0$

ใน steady state , average loss power = input power

∴ average loss power = 0.48 W #

ข้อสอบ midterm ปี 2561

2. (**3 คะแนน**) กำหนดให้ความถี่ของ damped harmonic oscillator เป็น 100 Hz และ อัตราส่วนระหว่าง amplitude ของการสั่นที่เกิดขึ้นติดกันมีค่าเป็น 1/2 จงหา undamped frequency ของ oscillator นี้

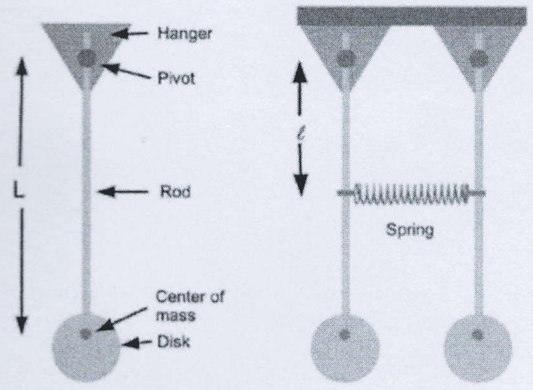
3. มวล m เคลื่อนที่ตามแนวแกน x โดยมีแรงกระทำประกอบด้วย restoring force ที่เขียนได้เป็น $(17/2)\beta^2 mx$ retarding force ที่เขียนได้เป็น $3\beta m\dot{x}$ และ driving force ที่เขียนได้เป็น $mA\cos\omega t$ เมื่อ x คือระยะทางที่วัดจากตำแหน่งสมดุล β และ A เป็นค่าคงตัว จงตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 (**5 คะแนน**) ค่า angular frequency ω สำหรับ steady-state oscillation ที่ทำให้เกิด maximum displacement $x_{\max}$ เป็นเท่าใด

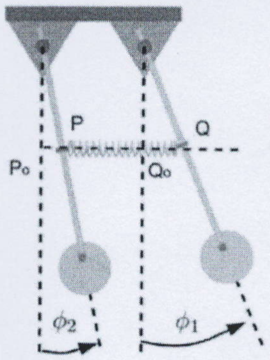
3.2 (**2 คะแนน**) จงหาค่า maximum displacement $x_{\max}$

4. พิจารณาการเคลือนทีของ coupled pendula ที่เหมือนกันทุกอย่าง

ttps://repo.iitbhu.ac.in/db/2016/ir-2016-382/Coupled_Pendula_reduced.pdf



รูปที่ 1 (ซ้ายมือ) แสดง pendulum และ ส่วนประกอบต่าง ๆ (ขวามือ) แสดง coupled pendula ขณะอยู่ที่ตำแหน่งสมดุล โดยกำหนดให้ L คือความยาวของ rod จากจุดหมุน (pivot) ถึงตำแหน่งจุดศูนย์กลางของก้อนมวล m ในขณะที่ l เป็นระยะทางจากจุดหมุนถึงตำแหน่งที่ติดสปริงที่มีค่า stiffness s



รูปที่ 2 แสดง coupled pendula เมื่อเกิดการกระจัดเชิงมุม ϕ_1 และ ϕ_2 โดยที่ $\phi_1 > \phi_2$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 (2 **คะแนน**) มีแรงอะไรกระทำต่อ pendulum แต่ละอันบ้าง

4.2 (6 **คะแนน**) จงเขียน equations of motions สำหรับ pendulum แต่ละอัน โดยอาศัย $\sum \tau = I\alpha$ ในเทอมของ ϕ_1 และ ϕ_2

4.3 (7 **คะแนน**) โดยอาศัย eigen value equation จงหา normal mode frequencies ของ coupled pendula นี้

6. เชือกยาวเส้นหนึ่งมีมวลต่อความยาวเท่ากับ 0.2 kg m^{-1} ถูกขึงตึงด้วยแรงดึงขนาด 500 N จงตอบคำถามต่อไปนี้

6.1 (2 **คะแนน**) จงหาอัตราเร็วของ transverse wave บนเส้นเชือก

6.2 (4 **คะแนน**) จงหากำลังเฉลี่ย (mean power) ที่ต้องใช้ในการทำให้เกิด travelling wave ที่มี amplitude 10 mm และความยาวคลื่น 0.5 m บนเชือกเส้นนี้ได้

6.3 (4 **คะแนน**) ถ้าผูกเชือกเส้นนี้กับเชือกอีกเส้นหนึ่งที่มวลต่อความยาวเป็น 0.8 kg m^{-1} จะมี power กี่เปอร์เซ็นต์ที่สามารถส่งผ่านไปยังเชือกเส้นที่สองได้ พร้อมทั้งเปรียบเทียบเฟสระหว่างคลื่นสะท้อนและคลื่นส่งผ่านกับคลื่นตกกระทบที่เกิดขึ้น

ข้อสอบ midterm ปี 61

2. โดยอาศัยสมการ $\dfrac{A_0}{A_1} = e^{\frac{r\tau'}{2m}}$ เมื่อ τ' คือ คาบการสั่นของ damping oscillation

โจทย์กำหนด $\dfrac{A_0}{A_1} = \dfrac{1}{2} = 0.5$

$$\therefore \ln(0.5) = \frac{r\tau'}{2m}$$

$$\frac{r^2}{4m^2} = \left(\frac{\ln 0.5}{\tau'}\right)^2$$

จาก $\omega'^2 = \left(\omega_0^2 - \dfrac{r^2}{4m^2}\right)$

$$\therefore \omega_0^2 = \omega'^2 + \frac{r^2}{4m^2}$$

$$= \omega'^2 + \left(\frac{\ln 0.5}{\tau'}\right)^2$$

$$= \omega'^2 + \left[\frac{(\ln 0.5)(\omega')}{2\pi}\right]^2$$

แทนค่า $f' = 100$ Hz

$\therefore f_0 = 100.6$ Hz #

3 3.1 มวล m เคลื่อนที่ตามแนวแกน x โดยมีแรงกระทำ ประกอบด้วย

restoring force $= \frac{17}{2}\beta^2 m x$

retarding force $= 3\beta m \dot{x}$

driving force $= m A \cos\omega t$

angular frequency ของ steady state ที่ทำให้เกิด x_{max} เขียนได้เป็น

มหาว $x_{max} = \dfrac{F_0}{\omega_r 2m}$ ←

$$\omega_r^2 = \omega^2 - \frac{r^2}{2m^2} = \frac{s}{m} - \frac{r^2}{2m^2}$$

$$= \frac{17}{2}\beta^2 m\left(\frac{1}{m}\right) - 9\beta^2 m^2\left(\frac{1}{2m^2}\right)$$

$$\omega_r = 2\beta$$ #

3.2. รูปทั่วไปของ forced oscillation เขียนได้เป็น

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = F_0 \cos\omega t$$

เปรียบเทียบกับกรณีที่กำลังพิจารณา

$$m\ddot{x} + \underbrace{3\beta m}_{r}\dot{x} + \underbrace{\frac{17}{2}\beta^2 m}_{s}\, x = \underbrace{mA}_{F_0} \cos\omega t$$

และจากสมการ $\omega_r^2 = \omega^2 - \frac{r^2}{2m^2}$

และ $x_{max} = \frac{F_0}{\omega_r Z_m}$

โดยอาศัยความสัมพันธ์ $\omega_r Z_m = \omega' r$ (พิสูจน์จากตอนเรียน)

โดยที่ $\omega'^2 = \omega^2 - \frac{r^2}{4m^2}$

$$\therefore\ x_{max} = \frac{mA}{\omega'(3\beta m)}$$

จาก $\omega'^2 = \omega^2 - \frac{r^2}{4m^2} = \frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2}$

$$= \frac{17}{2}\beta^2 \frac{m}{m} - \frac{(3\beta m)^2}{4m^2}$$

$$\therefore\ \omega'^2 = \frac{17}{2}\beta^2 - \frac{9}{4}\beta^2 = \frac{25}{4}\beta^2$$

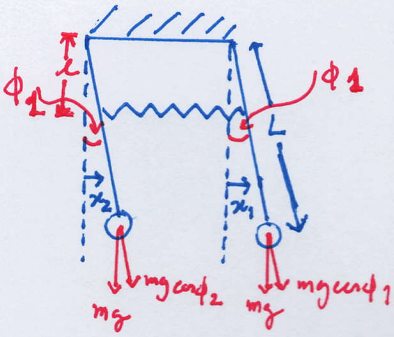
$$\omega' = \frac{5}{2}\beta$$

$$\therefore\ x_{max} = \frac{mA}{(\frac{5}{2}\beta)(3\beta m)} = \frac{2}{15}\frac{A}{\beta^2}$$ #

ข้อสอบ midterm ปี 61

4. 4.1 แรงที่กระทำต่อ pendulum ประกอบด้วย gravity และ แรง เนื่องจากสปริง

4.2 กำหนดให้ $\phi_1 > \phi_2$



โดยอาศัยสมการ $\Sigma \tau = I\alpha$

เราสามารถเขียน torque เนื่องจาก แรง ทั้ง สอง ใน 4.1 ได้ดังนี้

1. ทอร์คเนื่องจาก gravity

$$\tau = -rF\sin\theta$$

$$= -Lmg\sin\phi_1$$

สำหรับมุม $\phi_1 \to 0$ $\therefore \sin\phi_1 \approx \phi_1$

$$\therefore \tau_1 = -mgL\phi_1$$

2. ทอร์คเนื่องจาก~~แรง~~สปริง

จาก $\phi_1 > \phi_2$ $\therefore x_1 > x_2$ แสดงว่า สปริง ถูก stretched

ดังนั้น แรงดึงจากสปริง ของมวลอันขวา ชี้ไปทางซ้าย (ทางด้าน $-x$)

หรือเขียน ในรูป Hooke's law ได้เป็น $F = -s(x_1 - x_2)$

แต่เนื่องจาก $\phi_1 = \dfrac{x_1}{l}$ และ $\phi_2 = \dfrac{x_2}{l}$

$$\therefore F = -sl(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\tau_2 = \{-sl(\phi_1 - \phi_2)\}\, l\cos\phi_1$$

$$\because \phi_1 \to 0 \; ; \; \tau_2 = -sl^2(\phi_1 - \phi_2)$$

$\therefore$ equation of motion สำหรับ pendulum ขวามือ คือ

$$-mgL\phi_1 - sl^2(\phi_1 - \phi_2) = I\alpha = I\ddot{\phi}_1$$

หรือ

$$\boxed{\ddot{\phi}_1 = \frac{-mgL}{I}\phi_1 - \frac{sl^2}{I}(\phi_1 - \phi_2)}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ pendulum อันข้างซ้าย

$$\boxed{\ddot{\phi}_2 = \frac{-mgL}{I}\phi_2 + \frac{sl^2}{I}(\phi_1 - \phi_2)}$$

โดยที่ $I = mL^2$

โดยอาศัยวิธี eigenvalue function ก็จะได้ normal mode frequen

ได้เป็น

$$\omega^2 = g/L$$

และ $\omega^2 = \left(\dfrac{g}{L} + \dfrac{2sl^2}{mL^2}\right)$ #

28/29

ข้อสอบ midterm ปี 61

6

6.1 $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{500}{0.2}} = 50 \text{ m/s}$

6.2 หา mean power ที่ทำให้เกิด travelling wave ที่มี amplitude = 10 mm และ $\lambda = 0.5$ m

จาก $K_\lambda = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx$

$$= \frac{1}{4}\rho\omega^2 A^2 \lambda$$

และ $U_\lambda = \int_0^\lambda \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$

$$= \frac{1}{4} c^2 \rho k^2 A^2 \lambda \qquad \left(\text{โดยอาศัย } \frac{T}{\rho} = c^2 = \frac{\omega^2}{k^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\rho\omega^2 A^2 \lambda$$

$\therefore E_\lambda = K_\lambda + U_\lambda = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \lambda$

$P_{av} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 c$

จัดรูปด้วยการแทน $c^2k^2 = \omega^2$

$\therefore P_{av} = \frac{1}{2}\rho c^3 k^2 A^2$

แทนค่า $\rho = 0.2 \frac{kg}{m}$, $c = 50$ m/s, $\lambda = 0.5$ m และ $A = 10$ mm

$\therefore P_{av} = 197.4$ W #

6.3 โดยอาศัย transmission coefficient

$$T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2}$$

เนื่องจาก $Z = \rho c$

$\therefore Z_1 = (0.2)(50) = 10 \frac{kg}{s}$

$\therefore$ อัตราเร็วของคลื่นในเชือกอีกเส้น $c_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{500}{0.8}} = 25$ m/s

(แรงตึงเชือกเท่ากันทั้งสองเส้น)

$\therefore Z_2 = (0.8)(25) = 20 \frac{kg}{s}$

$\therefore T = \frac{4(10)(20)}{(10+20)} = \frac{8}{9} = 88.9\%$

คลื่นสะท้อนและคลื่นส่งผ่านมีเฟสตรงข้ามกัน #